Zadatak 261 (Branimir, maturant)

Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $k \cdot x^2 + \left(k^2 + k\right) \cdot x - 7 = 0$ ima dva međusobno suprotna rješenja.

$A.\ 0 \qquad B.\ \{0, -1\} \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 1$

Rješenje 261

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Razlomak je jednak nuli ako je brojnik jednak nuli.

$$a = 0 \ , \ b \neq 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{a}{b} = 0.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0 \ \text{ili} \ b = 0 \ \text{ili} \ a = b = 0.$$

Budući da su rješenja međusobno suprotna, vrijedi:

$$x_1 = -x_2 \ \Rightarrow \ x_1 + x_2 = 0 \ \Rightarrow \ \left[x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \right] \ \Rightarrow \ -\frac{b}{a} = 0 \ \Rightarrow \ b = 0.$$

Odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$k \cdot x^2 + \left(k^2 + k\right) \cdot x - 7 = 0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} k \cdot x^2 + \left(k^2 + k\right) \cdot x - 7 = 0 \\ a = k \ , \ b = k^2 + k \ , \ c = -7 \end{array}\right\}.$$

Zbog b = 0 slijedi:

$$k^2 + k = 0 \ \Rightarrow \ k \cdot (k + 1) = 0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} k = 0 \ \text{nema smisla} \\ k + 1 = 0 \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ k = -1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 261

Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $k \cdot x^2 + \left(k^2 - k\right) \cdot x - 7 = 0$ ima dva međusobno suprotna rješenja.

$A.\ 0 \qquad B.\ \{0, -1\} \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 1$

Rezultat: D.

www.halapa.com

Zadatak 262 (Branimir, maturant)

Odredite parametar $a \in R, \ a \neq 0$ takav da je zbroj rješenja jednadžbe $(2 \cdot x - 1)^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{a} \right)$ jednak šesterostrukom umnošku tih rješenja.

$A. \ a \in R, \ a \neq 0$ $\qquad$ $B.$ ne postoji takav $a \in R$ $\qquad$ $C. \ a = 3$ $\qquad$ $D. \ a = \frac{3}{2}$

Rješenje 262

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kako zapisati da je broj b n – terostruka vrijednost broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Preoblikujemo kvadratnu jednadžbu.

$$(2 \cdot x - 1)^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 2 \cdot x - \frac{2}{a} \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 - 2 \cdot x + \frac{2}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 + \frac{2}{a} = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{c} 4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + \frac{a+2}{a} = 0 \\ a = 4 \ , \ b = -6 \ , \ c = \frac{a+2}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{-6}{4} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{\frac{a+2}{a}}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{6}{4} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a+2}{4 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{6}{4} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a+2}{4 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a+2}{4 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ x_1 + x_2 = 6 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{array} \right] \Rightarrow \frac{3}{2} = 6 \cdot \frac{a+2}{4 \cdot a} \Rightarrow \frac{3}{2} = 6 \cdot \frac{a+2}{4 \cdot a} \Rightarrow \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{a+2}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow \frac{3}{2}=3\cdot\frac{a+2}{2\cdot a} \; / \cdot \frac{2\cdot a}{3} \Rightarrow a=a+2 \Rightarrow a=a+2 \Rightarrow 0\neq 2.$$

Jednadžba nema rješenja.
Odgovor je pod B.

Vježba 262

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 263 (Silvija, maturantica)

Koliko iznosi x u rješenju sustava jednadžba $\begin{cases} x-4\cdot y+3\cdot x\cdot y=3 \\ x\cdot y-1=0 \end{cases}$?

Rješenje 263

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$\left.\begin{matrix} x\cdot y-1=0 \\ x-4\cdot y+3\cdot x\cdot y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\cdot y=1 \\ x-4\cdot y+3\cdot x\cdot y=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-4\cdot y+3\cdot 1=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4\cdot y+3=3 \Rightarrow x-4\cdot y+3=3 \Rightarrow x-4\cdot y=0 \Rightarrow -4\cdot y=-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot y=-x \; / \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow y=\frac{1}{4}\cdot x.$$

Sada promatramo sustav

$$\left.\begin{matrix} y=\frac{1}{4}\cdot x \\ x\cdot y-1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=\frac{1}{4}\cdot x \\ x\cdot y=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\cdot\frac{1}{4}\cdot x=1 \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot x^2=1 \Rightarrow \frac{1}{4}\cdot x^2=1 \; / \cdot 4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=4 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 263

Koliko iznosi y u rješenju sustava jednadžba $\begin{cases} x-4\cdot y+3\cdot x\cdot y=3 \\ x\cdot y-1=0 \end{cases}$?

Rezultat: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$

Zadatak 264 (Robert, gimnazija)

Zadana je jednadžba $x^2-10\cdot x+2\cdot x\cdot y-y+y^2=0.$ Odredite njezina rješenja u skupu $N_0=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$

Rješenje 264

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

www.halapa.com

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Preoblikujemo jednadžbu.

$$x^2-10\cdot x+2\cdot x\cdot y-y+y^2=0 \Rightarrow x^2-2\cdot(5-y)\cdot x+y^2-y=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{kvadratna jednadžba,}\\ \text{nepoznanica je } x\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-2\cdot(5-y)\cdot x+y^2-y=0 \\ a=1 \ , \ b=-2\cdot(5-y) \ , \ c=y^2-y \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-2\cdot(5-y))\pm\sqrt{(-2\cdot(5-y))^2-4\cdot 1\cdot\left(y^2-y\right)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm\sqrt{4\cdot(5-y)^2-4\cdot\left(y^2-y\right)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{10-2\cdot y\pm\sqrt{4\cdot\left(25-10\cdot y+y^2\right)-4\cdot y^2+4\cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{10-2\cdot y\pm\sqrt{100-40\cdot y+4\cdot y^2-4\cdot y^2+4\cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{10-2\cdot y\pm\sqrt{100-40\cdot y+4\cdot y^2-4\cdot y^2+4\cdot y}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{10-2\cdot y\pm\sqrt{100-36\cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{10-2\cdot y\pm\sqrt{4\cdot(25-9\cdot y)}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{10-2\cdot y\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{25-9\cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{10-2\cdot y\pm 2\cdot\sqrt{25-9\cdot y}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left(5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left(5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2}=5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y}.$$

Budući da x mora biti iz skupa N_0, razlika 25 – 9 · y mora biti potpuni kvadrat. To će biti za:

- $\boxed{y=0} \Rightarrow x_{1,2}=5-0\pm\sqrt{25-9\cdot 0} \Rightarrow x_{1,2}=5\pm\sqrt{25} \Rightarrow x_{1,2}=5\pm 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=5+5 \\ x_2=5-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=0 \end{array}\right\}.$$

Rješenja su:

$$\left(x_1, y_1\right)=(10, 0) \quad , \quad \left(x_2, y_1\right)=(0, 0).$$

- $\boxed{y=1} \Rightarrow x_{3,4}=5-1\pm\sqrt{25-9\cdot 1} \Rightarrow x_{3,4}=4\pm\sqrt{25-9} \Rightarrow x_{3,4}=4\pm\sqrt{16} \Rightarrow$

www.halapa.com

$$\Rightarrow x_{3,4} = 4 \pm 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3 = 4+4 \\ x_4 = 4-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3 = 8 \\ x_4 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Rješenja su:

$$(x_3, y_2) = (8, 1) \quad , \quad (x_4, y_2) = (0, 1).$$

Vježba 264

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 265 (Gordana, gimnazija)

Riješite nejednadžbu $1 - \frac{2}{x-1} < \frac{2 \cdot x}{x+1}$.

Rješenje 265

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad a^2 \ge 0 \ , \ a \in R.$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 \quad , \quad \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a > 0 \ , \ b < 0 \\ a < 0 \ , \ b > 0 \end{matrix}\right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skup zadajemo nabrajanjem njegovih elemenata ili opisom karakterističnih svojstava koja posjeduju njegovi elementi. Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A i sve elemente koji se nalaze u skupu B. Označavamo ga $A \cup B$.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad , \quad |x| > a \ , \ a > 0 \Rightarrow x \in \langle -\infty, -a \rangle \cup \langle a, +\infty \rangle.$$

$$1 - \frac{2}{x-1} < \frac{2 \cdot x}{x+1} \Rightarrow 1 - \frac{2}{x-1} - \frac{2 \cdot x}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{1}{1} - \frac{2}{x-1} - \frac{2 \cdot x}{x+1} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1) \cdot (x+1) - 2 \cdot (x+1) - 2 \cdot x \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1 - 2 \cdot x - 2 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x}{x^2 - 1} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 1 - 2 \cdot x - 2 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x}{x^2 - 1} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1 - 2 - 2 \cdot x^2}{x^2 - 1} < 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 3}{x^2 - 1} < 0.$$

Razlomak je negativan. Primijetimo izraz $-x^2 - 3$ uvijek je negativan za svaki broj x.
Zato nazivnik $x^2 - 1$ mora biti pozitivan.

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle.$$

www.halapa.com

Vježba 265

Riješite nejednadžbu $1-\frac{2}{x-1} \le \frac{2 \cdot x}{x+1}$.

Rezultat: $x \in \left\langle -\infty, -1 \right\rangle \cup \left\langle 1, +\infty \right\rangle$.

Zadatak 266 (Tea, srednja škola)

Jedno rješenje jednadžbe $(a \cdot x-1) \cdot (x-a)=0$ jednako je – 1. Drugo rješenje jednadžbe je:

$A.\ -1 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ -3$

Rješenje 266

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Rješenje x = – 1 uvrstimo u jednadžbu kako bismo odredili a.

$$(a \cdot x-1) \cdot (x-a)=0 \Rightarrow [\, x=-1 \,] \Rightarrow (a \cdot (-1)-1) \cdot (-1-a)=0 \Rightarrow (-a-1) \cdot (-a-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-(a+1)) \cdot (-(a+1))=0 \Rightarrow (a+1) \cdot (a+1)=0 \Rightarrow (a+1)^2=0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1.$$

Jednadžba glasi:

$$(a \cdot x-1) \cdot (x-a)=0 \Rightarrow [\, a=-1 \,] \Rightarrow (-1 \cdot x-1) \cdot (x-(-1))=0 \Rightarrow (-x-1) \cdot (x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x+1) \cdot (x+1)=0 \Rightarrow -(x+1)^2=0 \Rightarrow -(x+1)^2=0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow (x+1)^2=0.$$

Jednadžba je kvadratna i ima dvostruko realno rješenje x = – 1.

$$(x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=-1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 266

Odmor!

Rezultat: …

www.halapa.com